Colle du 25 novembre : Séries entières, polynômes

Exercice 0 : Tous les exercices de la semaine précédente.

5.1 Polynômes

Exercice 1 : Soient P un polynôme à coefficients réels et (a,b) un point de $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que la courbe représentative de P soit symétrique par rapport au point (a,b).

Exercice 2 : L'anneau $\mathbb{Z}[X]$ est-il principal ?

Exercice 3 : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est algébrique s'il existe un polynôme non nul P à coefficients rationnels tel que $P(\alpha) = 0$. Un tel polynôme unitaire de degré minimal est appelé polynôme minimal de α.
1. Soit P un polynôme unitaire à coefficients rationnels annulant α. Montrer que P est le polynôme minimal de α si, et seulement si, P est irréductible.
2. Quel est polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{5}$?
3. Soit α un nombre algébrique. Suposons qu'il existe un polynôme à coefficients rationnels P dont α est une racine de multiplicité strictement plus grande que $\frac{1}{2}\deg(P)$. Montrer que α est rationnel.

Exercice 4 : Même contexte que l'exercice précédent. On admet la question 1 de l'exercice précédent.
1. Montrer que, si α est algébrique, alors l'anneau $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps qui, comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, est de dimension finie. Préciser sa dimension.
2. Soit p un nombre premier. Soit $P = a_n X^n + ... + a_0$ un polynôme à coeffients entiers tel que $a_n = 1$, p divise $a_{n-1}, ..., a_0$ et p^2 ne divise pas a_0. Montrer que P est irréductible.
3. Soit p un nombre premier. Notons $\phi_p = X^{p-1} + X^{p-2} + ... + X + 1$. En considérant $\phi_p(X+1)$, montrer que ϕ_p est irréductible.
4. Notons $\zeta_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. Montrer que ζ_p est algébrique et donner son polynôme minimal. En déduire la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\zeta_p]$.

Exercice 5 : Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que l'équation $P(x) = 7$ a au moins 4 solutions entières deux à deux distinctes. Montrer qu'il n'existe pas d'entier x tel que $P(x) = 14$.

Exercice 6 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines $x_1, ..., x_n$ deux à deux distinctes mais pas nécessairement simples. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de $x_1, ..., x_n$.

Exercice 7 : Montrer que l'ensemble des solutions de l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} \geq 1$$

est une réunion d'intervalles disjoints. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

Exercice 8 : Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ scindés. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$ est aussi scindé.

Exercice 9 : Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n)$.

Exercice 10 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d, et pour $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $n(z_0)$ le nombre de solutions deux à deux distinctes de l'équation $P(z) = z_0$. Calculer $\sum_{z \in \mathbb{C}} (d - n(z))$.

Exercice 11 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré n. Montrer que $(n-1)P'^2 \geq nPP''$.

Exercice 12 : Trouver tous les polynômes P et Q dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $(X^n - 1)Q = P^2 - P$.

Exercice 13 : Existe-t-il une suite de réels non nuls $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$?